Fonctions d'agrégation barycentriquement associatives

Barycentrically associative aggregation functions

Jean-Luc Marichal   Bruno Teheux

Université du Luxembourg
Unité de recherche en mathématiques
6, rue Coudenhove-Kalergi, L-1359 Kirchberg, Luxembourg
{jean-luc.marichal,bruno.teheux}@uni.lu

Résumé :

Nous étudions la propriété algébrique d'associativité barycentrique pour les fonctions d'agrégation. Cette propriété, bien connue dans l'axiomatisation des moyennes quasi-arithmétiques par Kolmogoroff-Nagumo, est souvent considérée comme très naturelle lorsque le procédé d'agrégation rappelle celui d'une moyenne (arithmétique, géométrique, harmonique...). Nous rappelons la définition de cette propriété et nous en proposons quelques généralisations. Nous présentons aussi quelques résultats, dont certains assez surprenants, liés à ces propriétés.

Mots-clés :

Fonction d'agrégation, fonction moyenne, associativité barycentrique.

Abstract:

We investigate the algebraic property of barycentric associativity for aggregation functions. This property, well-know in Kolmogoroff-Nagumo's axiomatization of the quasi-arithmetic means, is often considered as very natural whenever the agreggation process is of an (arithmetic, geometric, harmonic...) mean type. We recall the definition of this property and propose some extensions. We also present some results, some rather surprising, related to these properties.

Keywords:

Aggregation functions, mean function, barycentric associativity.

1 Fonctions d'agrégation

En général, les fonctions d'agrégation sont définies et utilisées pour combiner, fusionner et résumer plusieurs valeurs numériques en une seule, de telle sorte que le résultat final de l'agrégation prenne en compte, d'une manière prescrite, toutes les valeurs individuelles. De telles fonctions d'agrégation sont largement utilisées dans de nombreuses disciplines bien connues comme la statistique, l'économie, la finance, l'informatique, etc.

Pour donner un exemple, supposons que plusieurs personnes forment des jugements quantifiables sur la mesure d'un objet (poids, longueur, surface, hauteur, importance ou autres attributs) ou même sur le ratio de deux telles mesures (combien plus lourd, plus long, plus grand, plus important un objet est-il par rapport à un autre). Pour atteindre un consensus sur ces jugements, des fonctions d'agrégation classiques ont été proposées : la moyenne arithmétique, la moyenne géométrique, la médiane et bien d'autres encore.

Pour choisir un mode d'agrégation raisonnable et satisfaisant dans un problème donné, il est utile d'adopter une approche axiomatique et sélectionner ainsi les fonctions d'agrégation qui vérifient certaines propriétés. De telles propriétés peuvent être dictées par la nature des valeurs à agréger. Par exemple, dans un problème classique d'analyse multicritère, un des objectifs est d'évaluer le score global d'une alternative à partir de scores partiels obtenus sur différents critères. Dans ce cas, il ne serait pas très naturel de donner au score global une valeur inférieure au plus petit des scores partiels ou supérieure au plus grand des scores partiels. Ainsi, seule une fonction de type "interne" (une moyenne) peut être utilisée. Pour donner un autre exemple, supposons que l'on souhaite agréger des opinions dans une procédure de vote. Si les votants sont anonymes, la fonction d'agrégation doit être symétrique.

2 Associativité barycentrique

Une des propriétés algébriques les plus intéressantes et les plus naturelles dans de nombreux problèmes est celle d'associativité barycentrique. En effet, celle-ci est vérifiée par la plupart des moyennes telles que la moyenne arithmétique, la moyenne géométrique, la moyenne quadratique, la moyenne exponentielle, etc.

Considérons une suite de fonctions réelles $F_1(x_1), F_2(x_1, x_2), F_3(x_1, x_2, x_3), \ldots$ et supposons que chacune de ces fonctions soit symétrique, c'est-à-dire invariante par permutation des variables. Dans sa formulation originale introduite par Bemporad [2], la propriété d'associativité barycentrique se traduit par l'équation

$$\begin{aligned} & F_n(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \\ = \; & F_n(x, \ldots, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

où $x = F_k(x_1, \ldots, x_k)$ et $k = 1, \ldots, n$.

Cette propriéré a été utilisée indépendamment par Kolmogoroff [3] et Nagumo [5] dans une caractérisation des moyennes quasi-arithmétiques. Ce résultat s'énonce comme suit.

Théorème. *Considérons une suite de fonctions réelles* $F_1(x_1), F_2(x_1, x_2), F_3(x_1, x_2, x_3), \ldots$ *vérifiant l'associativité barycentrique et supposons que chacune de ces fonctions soit symétrique, continue, strictement croissante sur chacune de ses variables et réflexive (c'est-à-dire* $F_k(x, \ldots, x) = x$*). Alors, et seulement alors, il existe une fonction réelle* ϕ *d'une variable réelle qui est continue et strictement monotone telle que*

$$F_n(x_1, \ldots, x_n) = \phi^{-1}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)\Big)$$

pour tout entier n.

Depuis son introduction, la propriété d'associativité barycentrique a été utilisée par différents auteurs [1, 3–5] et sous différents noms tels que l'associativité des moyennes, l'associativité pondérée, la décomposabilité, et l'associativité barycentrique.

Cette propriété est en fait un cas particulier d'une propriété plus générale, que nous appellerons *pré-associativité barycentrique*, et qui se traduit par l'implication

$$\begin{aligned} F_k(x_1, \ldots, x_k) \; &= \; F_k(x'_1, \ldots, x'_k) \\ &\Downarrow \\ F_n(x_1, \ldots, &x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \\ = \; F_n(x'_1, \ldots, &x'_k, x_{k+1}, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Lorsque les functions sont réflexives, cette dernière propriété se réduit à l'associativité barycentrique. De nombreuses fonctions d'agrégation sont barycentriquement pré-associatives sans être barycentriquement associatives. Citons par exemples les fonctions classiquement associatives telles que la somme $\sum_{i=1}^n x_i$ et le produit $\prod_{i=1}^n x_i$.

Dans notre exposé, nous présentons un certain nombre de propriétés, certaines assez étonnantes, qui relient la pré-associativité barycentrique à l'associativité barycentrique. Nous présentons également des généralisations de ces propriétés au cas où les fonctions ne sont pas symétriques, permettant ainsi que considérer des fonctions d'agrégation pondérées.

Références

[1] C. Antoine. *Les moyennes*, volume 3383 of *Que Sais-Je ? [What Do I Know ?]*. Presses Universitaires de France, Paris, 1998.

[2] G. Bemporad. Sul principio della media aritmetica. (Italian). *Atti Accad. Naz. Lincei*, 3(6) :87–91, 1926.

[3] A. N. Kolmogoroff. Sur la notion de la moyenne. (French). *Atti Accad. Naz. Lincei*, 12(6) :388–391, 1930.

[4] J.-L. Marichal, P. Mathonet, and E. Tousset. Characterization of some aggregation functions stable for positive linear transformations. *Fuzzy Sets and Systems*, 102(2) :293–314, 1999.

[5] M. Nagumo. Über eine klasse der mittelwerte. (German). *Japanese Journ. of Math.*, 7 :71–79, 1930.